

[A類数学コース, B類数学コース, B類情報コース, E類情報教育コース 対象]

数学 解答例

令和8年度
一般選抜前期
私費外国人
帰国生

I. (1) 例として, 「5, 13, 33, 83, 208」

(2) 51や19, 307 など (例として, $a=51$ のとき,
51, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1)(3) $l=4, 8, 12, \dots$ (4s)(4) $S \geq 1$ に対し,

$$a = \frac{2^{4S}-1}{5} \text{ は奇数である.}$$

• a が 整数 であること.

① $(a \text{ の分子 }) = 2^{4S}-1$ は 5 の 倍数 である.

② $S=1$ のとき, ① = 15.

S のとき成り立つと仮定すると $(2^{4S}-1=5\alpha)$,
 $S+1$ のとき,

$$\begin{aligned} \text{①} &= 2^{4(S+1)}-1 = 16(2^{4S}-1)+15 \\ &= 16 \cdot 5\alpha + 15 = 5(16\alpha+3) \end{aligned}$$

よって, 5 の 倍数 である. 

• a が 奇数 であること.

$$5a = 2^{4S}-1 \text{ は 奇数 である}$$

また, a を初項とするコラッツ型数列は,

$$a, 2^{4S}-1, \dots, 4, 2, 1, \dots$$

となり, 良いコラッツ型数列である.

このように, 良いコラッツ型数列を無限に構成できる.

〔A類数学コース, B類数学コース, B類情報コース, E類情報教育コース 対象〕

数学 解答例

令和8年度

一般選抜前期

私費外国人

帰国生

II.

$$(1) \quad |i+w+1|^2 = 1 \Leftrightarrow (i+w+1)(-i+\bar{w}+1) = 1$$

$$\Leftrightarrow (1-i)w^2 + 2w + (1+i) = 0 \Leftrightarrow (w+1)\{(1-i)w + (1+i)\} = 0$$

(2)より

よって $w = -1$, $-\frac{1+i}{1-i} = -i$ となり, 虚数解は $w = -i$ である。

(2) (1)と同様の計算で

$$(1+\bar{z})w^2 + (z+2+\bar{z})w + (1+z) = 0 \quad \cdots \textcircled{*}$$

を得る。

今 z は虚数でない, $1+\bar{z}$ も虚数でない, 特に $1+\bar{z} \neq 0$ である。

$$\textcircled{*} \Leftrightarrow (w+1)\{(1+\bar{z})w + (1+z)\} = 0 \Leftrightarrow w = -1, -\frac{1+z}{1+\bar{z}} = -\bar{z}$$

このうち虚数解は $w = -\bar{z}$ であり, z と w により $z+w+1 = 1$

(3) (2)より $w = -\bar{z}$ である, 2点 z, w は単位円の直径を成す。

三角形の三辺のうちで直径を底辺とすると, 高さは半径以下で,

例えは(1)のときはちょうど半径と一致する。

よって, (1)のときは面積最大であり, その値は $\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$

[A類数学コース, B類数学コース, B類情報コース, E類情報教育コース 対象]

数学 解答例

令和8年度
一般選抜前期
私費外国人
帰国生

III.

(1) 平均値の定理より

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(c)$$

をみたす $0 < c < 1$ が存在する。 $g'(x) = f(1) - f(0) - f'(x)$ より
 $g'(c) = f(1) - f(0) - f'(c) = 0$ である。

(2) $g''(x) = -f''(x) < 0$ から $g'(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ で減少する。

(1) より $g'(x) > g'(c) = 0$ ($0 \leq x < c$), $g'(x) < g'(c) = 0$ ($c < x \leq 1$)
 が成り立つ。 よって $g(x)$ は $0 \leq x \leq c$ で増加, $c \leq x \leq 1$ で減少するが,
 $g(0) = g(1) = 0$ より $0 < x < 1$ のとき $g(x) > 0$,
 すなわち

$$f(x) < x f(1) + (1-x) f(0)$$

が成り立つ。

(3) $f(0) = 1$ および $f'(x) > 0$ より, $0 < x \leq 1$ のとき $f(x) > 1$ が成り立つ。 よって

$$0 = \int_0^1 \log 1 \, dx \leq \int_0^1 \log f(x) \, dx \quad \dots \textcircled{1}$$

また (2) および $f(0) = 1, f(1) = 3$ より

$$f(x) < x \cdot f(1) + (1-x) f(0) = 2x + 1$$

が成り立つ。上式より

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log f(x) \, dx &\leq \int_0^1 \log(2x+1) \, dx \\ &= \left[x \log(2x+1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{2x+1} \, dx \\ &= \log 3 - 1 + \int_0^1 \frac{dx}{2x+1} \\ &= \log 3 - 1 + \left[\frac{1}{2} \log(2x+1) \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2} \log 3 - 1 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

を得る。①と②より示したい不等式が得られる。

[A類数学コース, B類数学コース, B類情報コース, E類情報教育コース 対象]

数学 解答例

令和8年度
一般選抜前期
私費外国人
帰国生

IV.

$a+b=1$ だから $a^a + b^b = a^a + (1-a)^{1-a}$ とある。よって関数 $f(x)$ と

$$f(x) = x^x + (1-x)^{1-x} \quad (0 < x < 1)$$

と定義する。 $g(x) = x^x \quad (0 < x < 1)$ とおくと

$$f(x) = g(x) + g(1-x) \quad \dots\dots (1)$$

とある。 $g(x) > 0 \quad (0 < x < 1)$ に注意して $g(x) = x^x$ の両辺の自然対数 $\log$ をとると

$$\log g(x) = x \log x \quad \text{と} \quad \log g(1-x) = (1-x) \log(1-x)$$

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \log x + 1 \quad \text{よって} \quad g'(x) = g(x)(\log x + 1) \quad \dots\dots (2)$$

である。一方、(1)より $f'(x) = g'(x) - g'(1-x)$, さらに $f''(x) = g''(x) + g''(1-x)$

であるが、(2)より

$$g''(x) = g'(x)(\log x + 1) + \frac{g(x)}{x} = g(x)(\log x + 1)^2 + \frac{g(x)}{x} > 0$$

だから $0 < x < 1$ において

$$f''(x) = g''(x) + g''(1-x) > 0$$

ゆえに $f'(x)$ は $0 < x < 1$ において単調に増加する。また $f'(\frac{1}{2}) = g'(\frac{1}{2}) - g'(1-\frac{1}{2}) = 0$

だから $f(x)$ の増減表は右の通り。よって $f(x)$ は

$x = \frac{1}{2}$ で最小値 $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} + (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ をとる。

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
f'		-	0	+	
f		↓	最小	↑	

ゆえに $x^x + (1-x)^{1-x} \geq \sqrt{2}$ となり

$$a^a + b^b = a^a + (1-a)^{1-a} \geq \sqrt{2} \quad \text{とある。}$$

等号は上の議論より $a = \frac{1}{2}$ のときに限る。そのとき $b = \frac{1}{2}$ 。よって等号成立は

$(a, b) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ のときのみに限る。