〔A類数学コース，B類数学コース，B類情報コース，E類情報教育コース　対象〕

数学 解答例

令和５年度
一般選抜前期 私費外国人 帰　国　生

I

(1) 真である.

証明. $1 < m \leqq n$ に対して,

$$n! + m = m \cdot \left(\frac{n!}{m} + 1\right) \quad \text{——} ①$$

また, $m \leqq n$ より, m は $n!$ をわり切るから,

$\frac{n!}{m} + 1$ は 1より大きい自然数である.

よって, ①より $n! + m$ は素数でない.

(2) 真である.

証明. p を $n! - 1$ の素因数とする.

明らかに $p \leqq n! - 1$ である.

このとき, 背理法により $n < p$ を示す.

$p \leqq n$ と仮定すると, p は $n!$ をわり切る.

よって, p は $n! - 1$ と $n!$ の公約数となるが,

このとき p は 1 をわり切ることになり矛盾する.

したがって, $n < p$ を得る.

〔A類数学コース，B類数学コース，B類情報コース，E類情報教育コース　対象〕

数学 解答例

令和５年度
一般選抜前期 私費外国人 帰　国　生

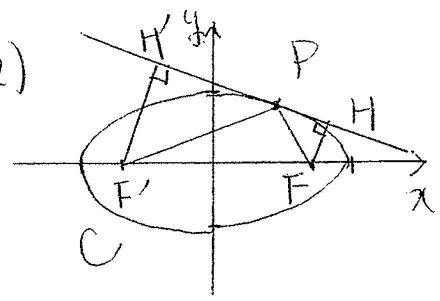
II

(1) ℓの式は $y=\frac{a^2}{y_1}\left(1-\frac{x_1}{4}x\right)$ とかけるので，これをCの式に代入すると

$$\frac{x^2}{4}+\frac{1}{a^2}\frac{a^4}{y_1^2}\left(1-\frac{x_1}{4}x\right)^2=1$$

これを整理すると $\frac{a^2}{4y_1^2}(x-x_1)^2=0$ よりℓとCの共有点の個数は1個である。特に判別式Dに関して $D=0$ なのでℓはCにPにおいて接している。

(2)



$\triangle PHF$と$\triangle PH'F'$は共に直角三角形なので対応する2辺の比が等しいことを示せばよい。$\alpha=\sqrt{4-a^2}$ とおくと $F(\alpha,0)$，$F'(-\alpha,0)$ なので

$$\frac{FH}{F'H'}=\frac{\left|\frac{x_1}{4}\alpha-1\right|\Big/\sqrt{\left(\frac{x_1}{4}\right)^2+\left(\frac{y_1}{a^2}\right)^2}}{\left|\frac{x_1}{4}(-\alpha)-1\right|\Big/\sqrt{\left(\frac{x_1}{4}\right)^2+\left(\frac{y_1}{a^2}\right)^2}}=\frac{|4-x_1\alpha|}{|4+x_1\alpha|}$$

$$\frac{PF}{PF'}=\frac{\sqrt{(x_1-\alpha)^2+y_1^2}}{\sqrt{(x_1-(-\alpha))^2+y_1^2}}=\frac{\sqrt{(x_1-\alpha)^2+a^2\left(1-\frac{x_1^2}{4}\right)}}{\sqrt{(x_1+\alpha)^2+a^2\left(1-\frac{x_1^2}{4}\right)}}=\frac{\sqrt{(4-x_1\alpha)^2}}{\sqrt{(4+x_1\alpha)^2}}=\frac{|4-x_1\alpha|}{|4+x_1\alpha|}$$

よって，$\triangle PHF$と$\triangle PH'F'$は相似である。

(3) $-2<x_1<2$　$0<\alpha<2$ なので条件を満たすPに関して

$$\frac{PF}{PF'}=\frac{|4-x_1\alpha|}{|4+x_1\alpha|}=\frac{4-x_1\alpha}{4+x_1\alpha}=\frac{1}{2}$$ が成立する。これを

整理して $x_1=\frac{4}{3\alpha}$ より $-2<\frac{4}{3\alpha}<2$ を得る。

$6\alpha=6\sqrt{4-a^2}>4$ なので求めるaの範囲は $0<a<\frac{4\sqrt{2}}{3}$

〔A類数学コース，B類数学コース，B類情報コース，E類情報教育コース　対象〕

数学 解答例

令和５年度
一般選抜前期 私費外国人 帰　国　生

Ⅲ

(1) まず $x^2-2x+2=(x-1)^2+1\geq 1$ に注意する。また

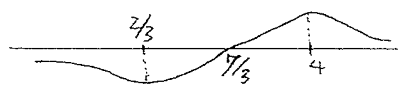
(1-1) $$f'(x)=\frac{a(x^2-2x+2)-(ax+b)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}=-\frac{ax^2+2bx-2(a+b)}{(x^2-2x+2)^2}$$

である。$f(x)$ が $x=4$ で極値をとるので $f'(4)=0$ でなければならない。したがって $16a+8b-2(a+b)=0$ だから $b=-\frac{7}{3}a$ である。

(2) $b=-\frac{7}{3}a$ だから $f(x)=\frac{a\left(x-\frac{7}{3}\right)}{x^2-2x+2}$ である。また $b=-\frac{7}{3}a$ を (1-1) に代入して整理すると $f'(x)=-\frac{a}{3}\frac{(3x-2)(x-4)}{(x^2-2x+2)^2}$ となる。

[$a>0$ のとき] このとき $f(x)$ の増減表は次の様になり，また $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ だから，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図の通りである。

x	$\cdots$	$2/3$	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘



よって $f(x)$ は $x=\frac{2}{3}$ で最小値をとる。これより $-\frac{1}{2}=f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{3}{2}a$ より $a=\frac{1}{3}$ となる。またこのとき $b=-\frac{7}{9}$ である。よって $f(x)=\frac{\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}}{x^2-2x+2}$ となる。また最大値は $f(4)=\frac{1}{18}$ である。

[$a<0$ のとき] このとき $f(x)$ の増減表は次の様になり，$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ だから，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図の通りである。

x	$\cdots$	$2/3$	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

よって $f(x)$ は $x=4$ で最小値をとる。よって $-\frac{1}{2}=f(4)=\frac{a}{6}$ より $a=-3$ となる。このとき $b=7$ である。よって $f(x)=\frac{-3x+7}{x^2-2x+2}$ となる。また $f(x)$ の最大値は $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{9}{2}$ である。

〔A類数学コース，B類数学コース，B類情報コース，E類情報教育コース　対象〕

数学 解答例

令和５年度
一般選抜前期 私費外国人 帰　国　生

Ⅳ

(1) $f(x)=\sqrt{x}-\log x$ とおくと $f'(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$ で増減表は次になる。

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	×	$-$	0	$+$
$f(x)$	×	↘		↗

よって、最小値は $f(4)=2(1-\log 2)>0$ で、$f(x)$ は $x>0$ で常に正となる。つまり、$\log x<\sqrt{x}$ が成立つ。

とくに $x>1$ のとき $0<\log x<\sqrt{x} \iff 0<\frac{\log x}{x}<\frac{1}{\sqrt{x}}$ であり、$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ と はさみうちの原理より $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ と求まる。

(2) $m,n>0$ より

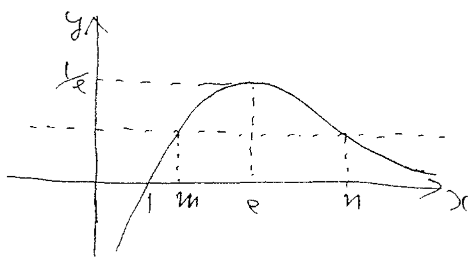
$$m^n=n^m \iff \log m^n=\log n^m \iff \frac{\log m}{m}=\frac{\log n}{n} \quad \cdots \circledast$$

である。

$g(x)=\frac{\log x}{x}$ とおくと $\lim_{x\to+0} g(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x)\overset{(1)より}{=}0$ である。

また $g'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$ であるので、増減表とグラフは次になる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$g'(x)$	×	$+$	0	$-$
$g(x)$	×	↗	$1/e$	↘



ここで、$y=g(x)$ のグラフより 自然数 m,n $(m<n)$ が $\circledast$ を満たすなら

$$1<m<e \quad かつ \quad e<n$$

であり、とくに $m=2$ と定まる。このとき $n=4$ と取ると

$$m^n=2^4=16=4^2=n^m$$

であり、確かに $\circledast$ を満たす。つまり、$(m,n)=(2,4)$ のみである。