〔A類数学選修，A類情報教育選修，B類数学専攻，E類情報教育コース　対象〕

数学 解答例

令和４年度
一般選抜前期 私費外国人 帰　国　生

I.

$P(s, t)$ とおき，接点 Q，R の x 座標を $\alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$ とする。

接線の傾きを k とすると，

$$x^2 = k(x-s)+t \iff x^2 - kx + (ks - t) = 0 \cdots ①$$

は重解を持ち，その解 $x = \frac{k}{2}$ が接点の x 座標である。

つまり，$k^2 - 4sk + 4t = 0 \cdots ②$ は $k = 2\alpha, 2\beta$ の2解を持ち，

$(\iff ①\text{の判別式} = 0)$　　$(\iff \frac{k}{2} = \alpha, \beta)$

解と係数の関係より　$\alpha + \beta = 2s$，$\alpha\beta = t \cdots ③$　をみたす。

ここで，面積 $S = \int_\alpha^\beta -(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ より

$$S = \frac{4}{3} \iff (\beta-\alpha)^3 = 8 \iff (\beta-\alpha)^2 = 4$$

$$\iff 4 = (\beta-\alpha)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta \underset{③}{=} 4s^2 - 4t$$

$$\iff t = s^2 - 1$$

をみたす。

逆に $t = s^2 - 1$ のとき $(②\text{の判別式})/4 = 4s^2 - 4t = 4 > 0$ より

②は異なる2つの実数解を持ち，上の計算から $S = \frac{4}{3}$ をみたす。

よって，点 P の軌跡は $y = x^2 - 1$ となる。

〔A類数学選修，A類情報教育選修，B類数学専攻，E類情報教育コース　対象〕

数学 解答例

令和４年度
一般選抜前期 私費外国人 帰国生

II

(1) $r_n(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, cは実数)とおく。

$x^3+x^2+x+1=(x+1)(x-i)(x+i)$ より

$f_n(-1)=r_n(-1)$ ∴ $1=a-b+c$ —①

$f_n(i)=r_n(i)$ ∴ $2i^{2n}+2i+1=-a+bi+c$ —②

$f_n(-i)=r_n(-i)$ ∴ $2(-i)^{2n}-2i+1=-a-bi+c$ —③

(③は②の共役である。)

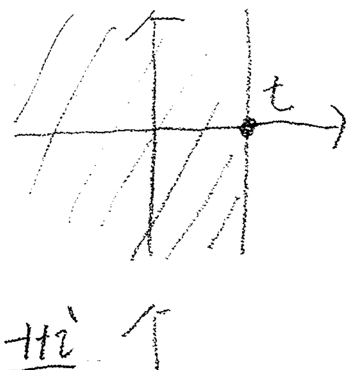
(i) $n=2m$ (mは自然数)のとき ①,②より $r_n(x)=2x+3$

(ii) $n=2m+1$ (mは自然数)のとき ①,②より $r_n(x)=2x^2+2x+1$

(2) $|z-\alpha|=|z-\beta|$ を満たす複素数zは、複素数平面上でαとβを両端とする線分の垂直二等分線になるので、

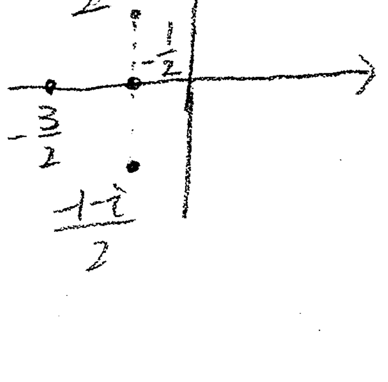
$$|z-(t+1+i)|\geqq|z-(t-1+i)|$$

を満たすzは次の斜線部分(境界を含む)となる。



(1)より $n=2m$ のとき $r_n(x)=0$ の解は $x=-\frac{3}{2}$

$n=2m+1$ のとき $r_n(x)=0$ の解は $x=\frac{-1\pm i}{2}$



左図より tの最小値は $-\frac{1}{2}$ である。

〔A類数学選修，A類情報教育選修，B類数学専攻，E類情報教育コース　対象〕

数学 解答例

令和４年度
一般選抜前期 私費外国人 帰 国 生

III.

(1) $\dfrac{1}{x(ax+b)} = \dfrac{1}{b}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{a}{ax+b}\right)$ だから

$$\int \frac{1}{x(ax+b)}\,dx = \frac{1}{b}\left(\log|x| - \log|ax+b|\right) + C \quad (C\text{は積分定数})$$

(2) $s = e^x$ とおくと $\dfrac{ds}{dx} = e^x = s$ だから $f(t) = \displaystyle\int_1^e \frac{ds}{s\{(t^4-2t^2+4)s+4\}}$ である。(1) の結果より

$$f(t) = \frac{1}{4}\Big[\log|s| - \log|(t^4-2t^2+4)s+4|\Big]_1^e$$
$$= \frac{1}{4}\left\{1 - \log\left((t^4-2t^2+4)e+4\right) + \log(t^4-2t^2+8)\right\}$$

となる。これより

$$f'(t) = \frac{1}{4}\left\{-\frac{4et^3-4et}{(t^4-2t^2+4)e+4} + \frac{4t^3-4t}{t^4-2t^2+8}\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{(4t^3-4t)\left((t^4-2t^2+4)e+4\right) - (4et^3-4et)(t^4-2t^2+8)}{\left((t^4-2t^2+4)e+4\right)(t^4-2t^2+8)}$$
$$= \frac{4(1-e)(t^3-t)}{\left((t^4-2t^2+4)e+4\right)(t^4-2t^2+8)}$$

よって $f'(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 1$. ここで $(t^4-2t^2+4)e+4 = e(t^2-1)^2+3e+4 > 0$ かつ $t^4-2t^2+8 = (t^2-1)^2+7 > 0$ に注意すれば，$-1 \leqq t \leqq 2$ における $f(t)$ の増減表は次の通り.

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(2)$

ここで

$$f(-1) = \frac{1}{4}\left\{1 + \log\frac{7}{3e+4}\right\},\quad f(0) = \frac{1}{4}\left\{1 + \log\frac{2}{e+1}\right\}$$
$$f(1) = \frac{1}{4}\left\{1 + \log\frac{7}{3e+4}\right\},\quad f(2) = \frac{1}{4}\left\{1 + \log\frac{4}{3e+1}\right\}$$

より，$f(t)$ は $t = \pm 1$ において最大値 $\dfrac{1}{4}\left\{1 + \log\dfrac{7}{3e+4}\right\} = \dfrac{1}{4}\log\dfrac{7e}{3e+4}$ をとり，$t = 2$ において

最小値 $\dfrac{1}{4}\left\{1 + \log\dfrac{4}{3e+1}\right\} = \dfrac{1}{4}\log\dfrac{4e}{3e+1}$ をとる.（注：$\dfrac{2}{e+1} - \dfrac{4}{3e+1} = \dfrac{2(e-1)}{(e+1)(3e+1)} > 0$ だから $f(0) > f(2)$）

〔A類数学選修，A類情報教育選修，B類数学専攻，E類情報教育コース　対象〕

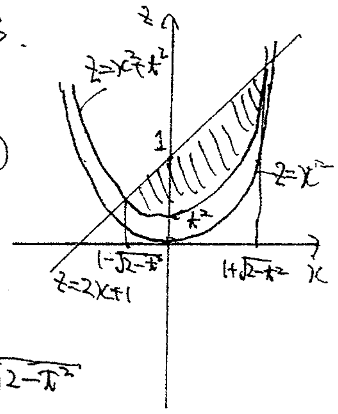
数学 解答例

令和４年度
一般選抜前期 私費外国人 帰　国　生

IV.

(1) 放物線 $z=x^2$ を z 軸のまわりに回転させてできる図形の方程式は、$z=x^2+y^2$ である。したがって、D が平面 $y=t$ と共通部分をもつのは、不等式 $x^2+t^2 \leqq 2x+1$ をみたす実数 x が存在するときに限る。2次方程式 $x^2+t^2=2x+1$、すなわち、

$$x^2-2x+(t^2-1)=0 \quad \text{—(1)}$$



が実数解をもつ条件は、判別式 $4-4(t^2-1)$ $(=4(2-t^2)) \geqq 0$ であるので、

$$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$$

のとき、そのときに限り、D は平面 $y=t$ と共通部分をもつ。また、このとき (1) の実数解は、$x=1\pm\sqrt{2-t^2}$ であるので、

$$S(t)=\int_{1-\sqrt{2-t^2}}^{1+\sqrt{2-t^2}} \{(2x+1)-(x^2+t^2)\}dx$$

$$=\left[x^2-\frac{1}{3}x^3+(t^2-1)x\right]_{1-\sqrt{2-t^2}}^{1+\sqrt{2-t^2}}=\frac{4}{3}(2-t^2)^{3/2}$$

(2) D の体積を V とすると、

$$V=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} S(t)dt=\frac{4}{3}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(2-t^2)^{3/2}dt.$$

変数変換 $t=\sqrt{2}\sin\theta$ によって、

$$=\frac{16}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\, d\theta$$

余弦関数の倍角公式を重ねて使うと、$\cos^4\theta=\frac{1}{8}\cos 4\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}$

だから、

$$=\frac{16}{3}\cdot\frac{3}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta=2\pi.$$