令和６年度　東京学芸大学大学院教育学研究科　入学試験

試験区分		
	一般選抜	○
	現職教員選抜	○
	外国人留学生等選抜	○
	派遣教員選抜	✕
	特別選抜	✕

科目	数学教育・数学
対象	数学教育サブプログラム

受験番号

I.（1）　下の問いに答えよ．

(a)　円錐の側面の展開図は半径 10 cm，中心角 θ （$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$）の扇形である．
この円錐の体積が最大になるときの中心角と体積を求めよ．

(b)　昭和 17 年の教授要目（文部省）に沿って編纂された教科書『数学　第一類』では，中学校第１学年に，(a)のような円錐の体積が最大になるときの中心角を求める問題が掲載されている．当時の中学校１年生も三平方の定理や微分は未習である．どのようにして求めると考えられるかを説明せよ．また，三平方の定理や微分が未習の生徒に(a)のような問題を考えさせる意義について述べよ．

【解答欄】

＜出題の意図＞
算数・数学科における学習内容や活動の意義に関して，生徒の発達段階と対応付けて考察できるかを評価する．

令和６年度　東京学芸大学大学院教育学研究科　入学試験

試験区分		
	一般選抜	○
	現職教員選抜	○
	外国人留学生等選抜	○
	派遣教員選抜	×
	特別選抜	×

科目	数学教育・数学
対象	数学教育サブプログラム

受験番号					

I. (2)　凸四角形の４つの内角の二等分線の性質について探究する．下の問いに答えよ．

(a)　４つの内角の二等分線が１点で交わる四角形の例を挙げよ．

(b)　隣り合う４つの内角の二等分線がつくる四角形を考える．この四角形に関する性質を推測し，推測したうちの２つを述べよ．

(c)　(b)で性質を推測するとき，何をどのような順序で考えたかを説明せよ．

(d)　(b)で推測した２つの性質が成り立つかどうかを示せ．

【解答欄】

＜出題の意図＞

算数・数学科における問題発見・問題解決の過程を自立的に遂行するとともに，そのプロセスを客観的に記述・分析できるかを評価する．

試験区分		
	一般選抜	○
	現職教員選抜	○
	外国人留学生等選抜	○
	派遣教員選抜	×
	特別選抜	×

科目	数学教育・数学
対象	数学教育サブプログラム

受験番号					

I. (3)　算数・数学科の授業において，児童・生徒の考えや発言を誤りや不十分なものも含めて板書することの意義を，具体的な板書事例を挙げて論じよ．

【解答欄】

＜出題の意図＞

算数・数学科の授業において，児童・生徒の考えをもとに概念や方法を構成していく過程における板書の役割や意義を具体的に考究できるかどうかを評価する．

令和６年度　東京学芸大学大学院教育学研究科　入学試験

試験区分		
	一般選抜	○
	現職教員選抜	○
	外国人留学生等選抜	○
	派遣教員選抜	×
	特別選抜	×

科目	数学教育・数学
対象	数学教育サブプログラム

受験番号					

II．(1)　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，下の問いに答えよ．

(a) 自然数 n に対し，A^n を求めよ．

(b) $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ を満たす正則行列 P の一つと数 a の値を求めよ．

【解答欄】

(解答例)

(a) E を単位行列とする．$|xE - A| = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$ より，A の固有値は 1，2，3 である．

固有値が 1 のときの固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，固有値が 2 のときは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，固有値が 3 のときは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が挙げられる．

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ であり，$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる．

このとき，$A^n = Q(Q^{-1}AQ)^n Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 1-2^n & 2^n-1 \\ 2^n-3^n & 1-2^n+3^n & 2^n-1 \\ 2^n-3^n & 3^n-2^n & 2^n \end{pmatrix}$ を得る．

(b) $P = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ を題意を満たす正則行列とすると，$BP = P\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ より，$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を得る．P が正則であることから，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ なので，a は B の固有値である．$|xE - B| = (x-3)^2$ より，$a = 3$ を得る．また，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は固有値 3 に対する固有ベクトルなので，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ として $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ が挙げられる．一方，$B\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ より，$\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$．この方程式を解くと，$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ が解の一つとなる．逆に，$P = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ であり，$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ を満たす．よって，$a = 3$ と題意を満たす正則行列 P の一つとして，

$P = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ を得る．

令和６年度　東京学芸大学大学院教育学研究科　入学試験

試験区分		
	一般選抜	○
	現職教員選抜	○
	外国人留学生等選抜	○
	派遣教員選抜	×
	特別選抜	×

科目	数学教育・数学
対象	数学教育サブプログラム

受験番号					

II．(2)　実数全体で定義された関数 $f(x)$ について，下の問いに答えよ．

(a) 実数 a, b に対して，$\lim_{x \to a} f(x) = b$ の定義を ε-δ 論法で述べよ．

(b) 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ において連続かつ非負であるとする．このとき，$f(c) > 0$ となる $c\,(a < c < b)$ が存在するならば $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ が成り立つことを示せ．

【解答欄】

(解答例)

(a) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して $0 < |x - a| < \delta$ なる任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $|f(x) - b| < \varepsilon$ が成立する．

(b) 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ において連続であるから，ある $0 < \delta < \min(c - a, b - c)$ が存在して $|x - c| < \delta$ なる任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(x) - f(c)| < \frac{f(c)}{2}$$

が成り立つ．上式が成り立つとき

$$f(x) > \frac{f(c)}{2}$$

が成り立つから，積分の単調性より

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2}\,dx = \delta f(c) > 0$$

となる．さらに $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ において非負であるから，積分の正値性より

$$\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx \geq 0, \quad \int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx \geq 0$$

となる．以上により

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,dx > 0$$

を得る．

試験区分		
	一般選抜	○
	現職教員選抜	○
	外国人留学生等選抜	○
	派遣教員選抜	×
	特別選抜	×

科目	数学教育・数学
対象	数学教育サブプログラム

受験番号					

Ⅱ．(3)　前の(1)(2)のいずれかについて，学校数学とのつながりを述べよ．
解答は下の枠内に書くこと．

【解答欄】

＜出題の意図＞

学部等で学習する数学と，学校数学の内容や学習指導とのつながりについて論じることができるかどうかを評価する．また，論理的に適切な表現を用いることができるかどうかを評価する．